ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. σχολικό βιβλίο σελ. 175 **Α2.** σχολικό βιβλίο σελ. 129 **Α3. α.** Λ **β.** Λ **γ.** Σ **δ.** Λ **ε.** Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Πρέπει $\begin{cases} 1-\frac{2}{\alpha} \\ \alpha \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\alpha-2}{\alpha} > 0 \\ \alpha \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\alpha-2)\alpha > 0 \\ \alpha \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow ..... \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha < 0 \text{ ή } \alpha > 2 \\ \alpha \neq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow$ α<0 ή α>2

Β2 α. $\begin{cases} 1-\frac{2}{\alpha} > 1 \\ \alpha \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{2}{\alpha} > 0 \\ \alpha \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha < 0 \\ \alpha \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$ α<0.

β) Πρέπει $\begin{cases} 0 < 1-\frac{2}{\alpha} < 1 \\ \alpha \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-\frac{2}{\alpha} > 0 \\ 1-\frac{2}{\alpha} < 1 \\ \alpha \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha < 0 \text{ ή } \alpha > 2 \\ -\frac{2}{\alpha} < 0 \\ \alpha \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \dots$

$\Leftrightarrow$ α>2

Β3. Για α=3 : f(x) = $(\frac{1}{3})^x$ x ∈ R .

f(2x)+f(x)-2=0 $\Leftrightarrow$ $(\frac{1}{3})^{2x}$ + $(\frac{1}{3})^x$-2 $\overset{y=(\frac{1}{3})^x}{\underset{y>0}{\Leftrightarrow}}$ $y^2+y-2=0 \Leftrightarrow .... \Leftrightarrow y=-2$

απορρίπτεται ή y=1 $\Leftrightarrow (\frac{1}{3})^x=1=(\frac{1}{3})^0 \Leftrightarrow$ x=0.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Εκτελούμε τη διαίρεση :

$$\begin{array}{l|l} x^4-5x^3+ax+\beta & x^2+x+1 \\ \cline{2-2} -x^4-x^3-x^2 & x^2-6x+5 \\ \hline -6x^3-x^2+ax+\beta & \\ \quad 6x^3+6x^2+6x & \\ \hline 5x^2+(a+6)x+\beta & \\ -5x^2-5x-5 & \\ \hline (a+1)x+\beta-5 & \end{array}$$

Το x^2+x+1 διαιρεί το $q(x)$ άρα υ(x)=0 $(\alpha+1)x+\beta-5=0 \Leftrightarrow$: $a+1=0$ και $\beta-5=0 \Leftrightarrow \alpha=-1$ και $\beta=5$.

Γ2. Λύνουμε την εξίσωση $q(x)=0 \Leftrightarrow (x^2+x+1)(x^2-6x+5)=0 \Leftrightarrow$ $x^2+x+1=0$ αδύνατη διότι $\Delta<0$ ή $x^2-6x+5=0 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x=1$ ή $x=5$

$q(2\sigma\upsilon\nu x+2)=0 \Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu x+2=1$ ή $2\sigma\upsilon\nu x+2=5 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x=-\frac{1}{2}$ ή

$\sigma\upsilon\nu x=\frac{3}{2}$ αδύνατη $\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x=\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow x=2\kappa\pi\pm\frac{2\pi}{3}$ $\kappa\in\mathbb{Z}$

Γ3. Το πρόσημο του $q(x)$ φαίνεται στον

x	$-\infty$ 1	5	$+\infty$
q(x)	+	-	+

πίνακα:

Η γραφική παράσταση του $q(x)$ βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$ αν και μόνο αν : $q(x)<0 \Leftrightarrow x\in(1,5)$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. **Με Horner η εξίσωση** $\Leftrightarrow$ **:** (x-1)($2x^2-5x+2$) $=0 \Leftrightarrow x_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{9}}{4} \Leftrightarrow x_1=2$ ή $x_2=\frac{1}{2}$

Δ2. Πρέπει $\begin{cases} x>0 \\ -2x+7>0 \\ 7x-2>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ 2x<7 \\ 7x>2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ x<\frac{7}{2} \\ x>\frac{2}{7} \end{cases} \Leftrightarrow$ x∈ $(\frac{2}{7},\frac{7}{2})$

Η εξίσωση γράφεται $\ln x^2+\ln(-2x+7)=\ln(7x-2) \Leftrightarrow \ln[x^2(-2x+7)]=\ln(7x-2)$ $\overset{1-1}{\Leftrightarrow}$.......... $\Leftrightarrow 2x^3-7x^2+7x-2=0 \overset{Δ_1}{\Leftrightarrow}$ x=1 ή x=2 ή x=$\frac{1}{2}$ δεκτές.

Δ3. Η εξίσωση γράφεται $e^{2ημ^3x}=\frac{e^{2-7ημχ}}{e^{-7ημ^2x}} \Leftrightarrow e^{2ημ^3x}= e^{2-7ημχ+7ημ^2χ} \overset{1-1}{\Leftrightarrow}$ ...... $\Leftrightarrow$

$2ημ^3x-7ημ^2x+7ημχ-2=0 \overset{ημχ=ω}{\Leftrightarrow} 2ω^3-7ω^2x+7ω-2=0 \overset{Δ_1}{\Leftrightarrow}$ ω=1 ή ω=2 ή ω = $\frac{1}{2}$

Για ω=1 : ημx=1 $\Leftrightarrow$ ημx= ημ $\frac{\pi}{2}$ $\Leftrightarrow$ x= 2κπ + $\frac{\pi}{2}$, κ∈ Z **Για ω=2**: ημx= 2 αδύνατη.

Για ω= $\frac{1}{2}$: ημx = $\frac{1}{2}$ = ημ $\frac{\pi}{6}$ $\Leftrightarrow$ x= 2κπ + $\frac{\pi}{6}$, ή x= 2κπ + $\frac{5\pi}{6}$, κ∈ Z

ΘΕΜΑ Ε

Ε1. $Ag=(0,+\infty)$

$A_f:\begin{cases} 3^x+2>0 \\ \ln(3^x+2)\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in\mathbb{R} \\ \ln(3^x+2)\neq \ln 1 \end{cases} \overset{1-1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x\in\mathbb{R} \\ 3^x+2\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in\mathbb{R} \\ 3^x\neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in\mathbb{R} \\ x\in\mathbb{R} \end{cases}$ $άρα A_f=R$

Ε2. Αν $P(x)=2x^3-x^2+x-2$ τότε το υπόλοιπο είναι :

$P(1)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} g(a)-g(\beta)=0 \\ \frac{\beta\cdot\kappa}{\kappa\ln(3^a+2)}-\frac{\beta}{\ln 5}=0 \end{cases} \overset{a\neq 0}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \ln a=\ln\beta \\ \frac{1}{\ln(3^a+2)}=\frac{1}{\ln 5} \end{cases} \underset{1-1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} a=\beta \\ \ln(3^a+2)=\ln 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\beta \\ \alpha=1 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha=\beta=1$

Ε3. $f(\log_3 e^{2\kappa})<1 \Leftrightarrow \frac{\kappa}{\ln(e^{2\kappa}+2)}<1 \overset{*}{\Leftrightarrow} \kappa<\ln(e^{2\kappa}+2) \Leftrightarrow \ln e^{\kappa}<\ln(e^{2\kappa}+2) \overset{\ln}{\Leftrightarrow}$

$e^{\kappa}<e^{2\kappa}+2 \Leftrightarrow e^{2\kappa}-e^{\kappa}+2>0 \overset{0<\omega=e^{\kappa}}{\Leftrightarrow} \omega^2-\omega+2>0 \Leftrightarrow \omega\in\mathbb{R}$ (διότι $\Delta<0$ και $\alpha=1>0$). Για $\omega\leq 0: e^{\kappa}<0$ αδύνατη. Για $\omega>0: e^{\kappa}\geq 0$ ισχύει για κάθε

$\kappa \in \mathbb{R}$, και από αρχικό περιορισμό $\kappa > \ln\sqrt{2}$ *(Ισχύει: $e^{2\kappa} + 2 > 1 \Leftrightarrow \ln(e^{2\kappa} + 2) > 0$)

Ε4. $4x^3 + \left(4 - g(16)\right)x^2 + \left(4\kappa^2 - g(16)\right)x + 4\kappa^2 + g(2a) - g(2) - g(a) = 0 \Leftrightarrow$

$4x^3 + (4 - 4\ln 2)x^2 + (4\kappa^2 - 4\ln 2)x + 4\kappa^2 + \ln 2a - \ln 2 - \ln a = 0 \Leftrightarrow$

$4x^3 + (4 - 4\ln 2)x^2 + (4\kappa^2 - 4\ln 2)x + 4\kappa^2 + \ln 2a - \ln 2a = 0 \Leftrightarrow$

$4x^3 + (4 - 4\ln 2)x^2 + (4\kappa^2 - 4\ln 2)x + 4\kappa^2 = 0$ (1)

Το $g\left(\frac{1}{e}\right) = \ln\left(\frac{1}{e}\right) = \ln e^{-1} = -1$ είναι ρίζα της (1), άρα από Horner στη θέση -1 έχουμε:

4	4-4ln2	$4\kappa^2$-4ln2	$4\kappa^2$	-1
	-4	4ln2	$-4\kappa^2$	
4	-4ln2	$4\kappa^2$	0	

και η (1) γράφεται: $(x+1)[4x^2 - (4\ln 2)x + 4\kappa^2] = 0 \Leftrightarrow x = -1$ ή

$4x^2 - (4\ln 2)x + 4\kappa^2 = 0$ αδύνατη αφού έχει:

$\Delta = 16\ln^2 2 - 64\kappa^2 = 16(\ln^2 2 - 4\kappa^2) = 16(\ln + 2\kappa)(\ln 2 - 2\kappa) < 0$ διότι:

$\kappa > \ln\sqrt{2} \Leftrightarrow \kappa > \frac{\ln 2}{2} \Leftrightarrow 2\kappa > \ln 2 \Leftrightarrow \ln 2 - 2\kappa < 0$.

Επίσης $2\kappa > \ln 2 > 0$, οπότε: $\ln 2 + 2\kappa > 0$