ΘΕΜΑΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Γ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ (ΘΕΤΙΚΕΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΕΣ

ΕΠΙΣΤΗΜΕΣ)

1. Έστω συνάρτηση f συνεχής στο [0,2] με $\mathbf{f(0)=1}$ και συνεχή πρώτη παράγωγο για την οποία ισχύει τύπο $\mathbf{1\le f'(x)\le 3}$ για κάθε $\mathbf{x\in[0,2]}$.

α) Να δείξετε ότι $\mathbf{\int_{f(2)}^{2}\left(e^{x^2}-x^2\right)dx<0}$.

β) Να δείξετε ότι η εξίσωση $\mathbf{f'(x)e^{\frac{x}{2}}=x^2f(x)}$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (0,2).

γ) Να υπολογίσετε το όριο $\mathbf{\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(f(1)-7\right)x^5-9x^3+x+1}{\left(\int_{f^2(2)}^{4}\frac{e^t-t}{2\sqrt{t}}dt\right)x^4+4x^2-5}}$

ΛΥΣΗ

α) Έστω η συνάρτηση g ορισμένη στο R με τύπο $g(x)=e^{x^2}-x^2$. Η g είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο R ως σύνθεση εκθετικής – πολυωνυμικής και διαφορά με πολυωνυμική με $g'(x)=\left(e^{x^2}-x^2\right)'=2xe^{x^2}-2x=2x\left(e^{x^2}-1\right)$

$g'(x)=0\Leftrightarrow 2x=0 \text{ ή } e^{x^2}-1=0\Leftrightarrow 2x=0 \text{ ή } x^2=0\Leftrightarrow x=0$

$e^{x^2}-1>0\Leftrightarrow x^2>0\Leftrightarrow x\neq 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$2x$	$-$	ϕ	$+$
$e^{x^2}-1$	$+$	ϕ	$+$
$2x\left(e^{x^2}-1\right)$	$-$	ϕ	$+$

Τότε

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	ϕ	$+$
g	$\searrow$	$\vert$	$\nearrow$

Η συνάρτηση g παρουσιάζει ελάχιστη τιμή στη θέση $x_0=0$ δηλαδή

$g(x)\ge g(0)=1>0$.

Επίσης

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ συνεχής στο } [0,2] \\ f \text{ παρ/μη στο } (0,2) \end{array}\right\} \overset{\text{ΘΜΤ}}{\Longrightarrow} \text{ υπάρχει τουλάχιστον ένα } \xi \in (0,2) \text{ ώστε}$$

$$f'(\xi) = \frac{f(2)-f(0)}{2} = \frac{f(2)-1}{2}.$$

Τότε $1 \le f'(\xi) \le 3 \Leftrightarrow 1 \le \dfrac{f(2)-1}{2} \le 3 \Leftrightarrow 2 \le f(2)-1 \le 6 \Leftrightarrow 3 \le f(2) \le 7$ άρα $f(2) > 2$.

Τότε $\displaystyle\int_{f(2)}^{2}\left(e^{x^2}-x^2\right)dx = -\int_{2}^{f(2)}\left(e^{x^2}-x^2\right)dx < 0$.

β) Έχουμε $e^{\frac{x}{2}}f'(x) = x^2 f(x) \Leftrightarrow f'(x)e^{\frac{x}{2}} - x^2 f(x) = 0$.

Έστω η συνάρτηση h ορισμένη στο [0,2] με τύπο $h(x) = f'(x)e^{\frac{x}{2}} - x^2 f(x)$.
Η h είναι συνεχής στο [0,2] ως σύνθεση και πράξεις συνεχών.
$h(0)h(2) = f'(0)\left(f'(2)e - 4f(2)\right) < 0$ διότι $1 \le f'(0) \le 3$ και

$$\left.\begin{array}{l} 1 \le f'(2) \le 3 \\ 3 \le f(2) \le 7 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{c} e \le ef'(2) \le 3e \\ -28 \le -4f(2) \le -12 \end{array}\right\} \overset{(+)}{\Rightarrow} e-28 \le f'(2)e - 4f(2) \le 3e-12$$

Άρα από Θ.Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (0,2)$ ώστε $h(x_0) = 0$.

γ) Επειδή $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in [0,2]$ η f είναι γνησίως αύξουσα στο [0,2] άρα $f(1) < f(2) \le 7 \Leftrightarrow f(1) - 7 < 0$.

Θέτουμε $x = \sqrt{t}$ άρα $dx = \dfrac{1}{2\sqrt{t}}dt$, $x_1 = \sqrt{f^2(2)} = f(2)$ και $x_2 = \sqrt{4} = 2$

Τότε $\displaystyle\int_{f^2(2)}^{4}\frac{e^t - t}{2\sqrt{t}}dt = \int_{f(2)}^{2}\left(e^{x^2} - x^2\right)dx < 0$.

Άρα

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(f(1)-7\right)x^5 - 9x^3 + x + 1}{\left(\displaystyle\int_{f^2(2)}^{4}\frac{e^t-t}{2\sqrt{t}}dt\right)x^4 + 4x^2 - 5} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(f(1)-7\right)x^5}{\left(\displaystyle\int_{f^2(2)}^{4}\frac{e^t-t}{2\sqrt{t}}dt\right)x^4} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(f(1)-7\right)}{\left(\displaystyle\int_{f^2(2)}^{4}\frac{e^t-t}{2\sqrt{t}}dt\right)}x = +\infty$$

2. Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $\mathbf{f: R \to R}$ ***για την οποία ισχύουν:***

- $\int_0^1 (2xf(x) + x^2 f'(x))dx = e$
- $\mathbf{f(x) \neq 0}$ ***για κάθε*** $\mathbf{x \in R}$
- $\mathbf{f'(x) \cdot f(x) + f'(x) = (1 + e^x) \cdot f(x), x \in R}$

Ακόμη δίνεται η συνάρτηση $\mathbf{g(x) = \begin{cases} f(x) + x, & x \leq 0 \\ x \cdot \ln x + \frac{x^2}{2} - 2x + 1, & x > 0 \end{cases}}$

α. Να δείξετε ότι f(x)>0 για x$\in$ **R** ***και ότι*** $\mathbf{f(x) = e^x}$, $\mathbf{x \in R}$.

β. Να δείξετε ότι η g(x) είναι συνεχής στο R και να αποδείξετε ότι η $\mathbf{C_g}$ ***τέμνει τον*** $\mathbf{x'x}$ ***σε τρία ακριβώς σημεία*** $\mathbf{A(x_1, 0), B(x_2, 0), \Gamma(x_3, 0)}$ ***με***
$\mathbf{x_1 < 0 < x_2 < x_3}$.

γ. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου μεταξύ της γραφικής παράστασης της g ,του άξονα x΄x και των κατακορύφων x=2 και x=3.

δ. Έστω η συνάρτηση $h(x) = f(x^2)$ ***και H(x) είναι μια παράγουσα αυτής στο*** $\mathbb{R}$ ***με H(1)=0.***

i) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^1 H(x)\,dx$.

ii) Να μελετήσετε την H(x) ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής και στη συνέχεια να δείξετε ότι $H(7x) - 2x \cdot h(7x) < H(5x)$ ***για κάθε x>0.***

ε. Να βρείτε το όριο $\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(\eta\mu x)}{x - \eta\mu x}$.

α) $\int_0^1 (2xf(x) + x^2 f'(x))dx = e \Leftrightarrow \int_0^1 (x^2 f(x))' dx = e \Leftrightarrow \left[x^2 f(x)\right]_0^1 = e \Leftrightarrow f(1) = e$

Επιπλέον ισχύει $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in R$ και είναι συνεχής στο R άρα διατηρεί πρόσημο στο R και αφού $f(1) = e > 0$ θα είναι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in R$.

Ισχύει : $f'(x)\cdot f(x)+f'(x)=(1+e^x)\cdot f(x) \overset{f(x)>0}{\Leftrightarrow} \frac{f'(x)\cdot f(x)}{f(x)}+\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{(1+e^x)\cdot f(x)}{f(x)} \Leftrightarrow f'(x)+(\ln f(x))'=1+e^x \Leftrightarrow \left(f(x)+\ln f(x)\right)'=(x+e^x)'$ Άρα

$f(x)+\ln f(x)=x+e^x+c$

Θέτουμε x=1 : $f(1)+\ln f(1)=1+e^1+c \Leftrightarrow 1+e=e+1+c \Leftrightarrow c=0$

Άρα έχουμε $f(x)+\ln f(x)=x+e^x \Leftrightarrow f(x)+\ln f(x)=e^x+\ln e^x$: (2)

Θεωρούμε συνάρτηση $u(x)=\ln x+x\,,\ x>0$

$u'(x)=\frac{1}{x}+1>0$ για κάθε x>0. Άρα u(x) γνησίως αύξουσα στο (0,+∝)

άρα u(x) είναι 1-1. Οπότε η (2) γίνεται : $f(x)+\ln f(x)=e^x+\ln e^x \Leftrightarrow$

$u\left(f(x)\right)=u(e^x) \overset{u(x)1-1}{\Longleftrightarrow} f(x)=e^x, x\in R$

β) Ισχύει : $g(x)=\begin{cases} e^x+x & x\le 0 \\ x\cdot\ln x+\frac{x^2}{2}-2x+1\ , & x>0\end{cases}$

- $g(0)=e^0+0=1$
- $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(e^x+x)=1$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x\cdot\ln x+\frac{x^2}{2}-2x+1\right)=0+0-0+1=1$, επειδή

  $\lim\limits_{x\to 0^+}(x\cdot\ln x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{\left(-\frac{1}{x^2}\right)}=\lim\limits_{x\to 0^+}(-x)=0$

  Άρα $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} g(x)=g(0)=1.$ Επομένως η g(x) είναι συνεχής στο 0.

  Ακόμη η g(x) είναι συνεχής στο (-∞,0) και (0,+∞) ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων. Επομένως, η g(x) είναι συνεχής στο R.

Η g(x) είναι συνεχής στο A_1 =(-∞,0] άρα και στο 0 και

$g'(x)=e^x+1>0$ για κάθε x<0 ,άρα η g(x) είναι γνησίως αύξουσα στο (-∞,0]

$\lim\limits_{x\to -\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to -\infty}(e^x+x)=-\infty$, $g(0)=1$

Συνεπώς $g(A_1)=\left(\lim\limits_{x\to -\infty} g(x), g(0)\right]=(-\infty,1]$.

- Για x>0: $g'(x)=\ln x+1+x-2=\ln x+(x-1)$
- Για x>1: $\ln x>0$ και $x-1>0$

  Άρα $g'(x)>0$ για κάθε x>1 και επειδή η g(x) συνεχής στο $[1,+\infty)$ προκύπτει ότι η g είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$.

- Για $0 < x < 1$: $\ln x < 0$ και $x - 1 < 0$
  Άρα $g'(x) < 0$ για κάθε $x \in (0,1)$ και επειδή η $g(x)$ συνεχής στο $(0,1]$ προκύπτει ότι η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$.

Η g συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\mathbf{A_2 = (0,1]}$ και

$\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = 1$

$g(1) = \frac{1}{2} - 2 + 1 = \frac{1}{2} - \frac{2}{2} = -\frac{1}{2}$

Συνεπώς $g(A_2) = \left[g(1), \lim\limits_{x\to 0^+} g(x)\right) = [-\frac{1}{2}, 1)$

Η g συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\mathbf{A_3 = (1, +\infty)}$

$\lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = -\frac{1}{2} \lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \left(x \cdot \ln x + \frac{x^2}{2} - 2x + 1\right) = +\infty$

επειδή $\lim\limits_{x\to +\infty} (x \cdot \ln x) = +\infty$ και $\lim\limits_{x\to +\infty} (\frac{x^2}{2} - 2x + 1) = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x^2}{2} = +\infty$

Άρα $g(A_3) = \left(\lim\limits_{x\to 1} g(x), \lim\limits_{x\to +\infty} g(x)\right) = (-\frac{1}{2}, +\infty)$

- $0 \in g(A_1)$. Άρα υπάρχει $x_1 \in A_1$ τέτοιο ώστε $g(x_1) = 0$ και επειδή g γνησίως αύξουσα στο A_1 το x_1 είναι μοναδικό.
- $0 \in g(A_2)$. Άρα υπάρχει $x_2 \in A_2$ τέτοιο ώστε $g(x_2) = 0$ και επειδή g γνησίως φθίνουσα στο A_2 το x_2 είναι μοναδικό.
- $0 \in g(A_3)$. Άρα υπάρχει $x_3 \in A_3$ τέτοιο ώστε $g(x_3) = 0$ και επειδή g γνησίως αύξουσα στο A_3 το x_3 είναι μοναδικό.

Ακόμη ισχύει $x_1 < 0 < x_2 < x_3$. Άρα η C_g τέμνει τον $x'x$ σε ακριβώς τρία σημεία $A(x_1, 0)$, $B(x_2, 0)$, $\Gamma(x_3, 0)$.

γ). Ζητάμε το πρόσημο της g στο [2,3]. Γνωρίζουμε ότι στο $[1, +\infty)$ έχει μοναδική ρίζα την x_3 από το Δ2.Πρέπει να προσδιορίσουμε τη θέση της ρίζας .Στο [1,2] η g είναι συνεχής και $g(1) \cdot g(2) = -\ln 2 + \frac{1}{2}$,άρα από Θ.Β η $x_3 \in (1,2)$.Για $x > x_3$ η f είναι γνησίως αύξουσα ,άρα $g(x) > g(x_3) = 0$.Οπότε στο [2,3] ισχύει $g(x) > 0$.Άρα το ζητούμενο εμβαδόν είναι:

$$E=\int_2^3 (x\ln x+\frac{x^2}{2}-2x+1)dx=\int_2^3 x\ln x dx+\int_2^3(\frac{x^2}{2}-2x+1)dx=$$

$$\left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_2^3-\frac{1}{2}\int_2^3 x dx+\left[\frac{x^3}{6}-x^2+x\right]_2^3=....=\frac{9}{2}\ln 3-\ln 4-\frac{25}{12}$$

δ.i) h(x)= $f(x^2)=e^{x^2}$. Αφού η H(x) είναι παράγουσα στο $\mathbb{R}$ τότε $H'(x)=h(x)=e^{x^2}$

$$\int_0^1 H(x)\,dx=\int_0^1 (x)'\cdot H(x)\,dx=\left[x\cdot H(x)\right]_0^1-\int_0^1 x\cdot H'(x)dx=1\cdot H(1)-0\cdot H(0)$$

$$-\int_0^1 x\cdot e^{x^2}dx=0-0-\int_0^1\left(\frac{x^2}{2}\right)' e^{x^2}dx=-\int_0^1\left(\frac{e^{x^2}}{2}\right)'dx=-\left[\frac{e^{x^2}}{2}\right]_0^1=-\frac{e}{2}+\frac{1}{2}=\frac{-e+1}{2}$$

ii.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$H''(x)$	--	0	+
H(x)	∩ Σ		Κ ∪

Η H(x) είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και παραγωγίσιμη $H'(x)=e^{x^2}$. Οπότε $H''(x)=2x\cdot e^{x^2}$. $H''(x)=0\Leftrightarrow x=0$

Η H(x) είναι κυρτή στο $[0,+\infty)$ και $H'(x)\nearrow [0,+\infty)$. Το $\Delta(0,H(0))$ είναι σημείο καμπής της C_H. Η H(x) είναι συνεχής το [5x , 7x] με x>0. Η H(x) είναι παραγωγίσιμη στο (5x , 7x). Από Θ.Μ.Τ υπάρχει $x_0\in(5x,7x)$ τέτοιο ώστε $H'(x_0)=\frac{H(7x)-H(5x)}{7x-5x}\Leftrightarrow H'(x_0)=\frac{H(7x)-H(5x)}{2x}$. Ακόμη $0<5x<x_0<7x\overset{H'\uparrow}{\Leftrightarrow}$

$$H'(x_0)<H'(7x)\Leftrightarrow\frac{H(7x)-H(5x)}{2x}<H'(7x)\Leftrightarrow H(7x)-H(5x)<2x\cdot h(7x)\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow H(7x)-2x\cdot h(7x)<H(5x)$ για κάθε x>0.

ε. α' τρόπος: $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(\eta\mu x)}{x-\eta\mu x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{\eta\mu x}}{x-\eta\mu x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\eta\mu x}(e^{x-\eta\mu x}-1)}{x-\eta\mu x}=e^0.1=1$,αφού

$\lim_{x\to 0}\frac{(e^{x-\eta\mu x}-1)}{x-\eta\mu x}=\lim_{u\to 0}\frac{(e^u-1)}{u}=\lim_{u\to 0}e^u=1$, θέσαμε $x-\eta\mu x=u$.

β' τρόπος:

για x>0, ημx<x οπότε με Θ.Μ.Τ. στο [ημx,x] και κριτήριο παρεμβολής το

όριο είναι 1.
για $x<0, \eta\mu x>x$ οπότε με Θ.Μ.Τ. στο $[x, \eta\mu x]$ και κριτήριο παρεμβολής το όριο είναι 1.

Επιμέλεια : Βιδάλης Ιωάννης - Μαθηματικός

Μπέγκος Γιώργος - Μαθηματικός

Φροντιστήριο Ορόσημο – Αγίας Παρασκευής – Χολαργός